MA1 2. cvičení –výběr příkladů (ze zadaných příkladů k opakování středoškolské matematiky)

III. Funkce .

1. Najděte definiční obory funkcí:

i) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$; $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$;

ii) $f(x)=\ln(x^2-1)$; $f(x)=\ln(\ln x-1)$;

iii) $f(x)=\sqrt{\cos x}$; $f(x)=\sqrt{1-(\sin x)^2}$; ; $f(x)=\ln(\sin x)$;

2. Načrtněte grafy funkcí (bez užití diferenciálního počtu, jen opakování „taháku“ grafů základních funkcí) :

a) $f(x)=|x|$ a pak zkuste také grafy funkcí $|x-1|$; $|x|-1$; $|-x|$;

b) $f(x)=x^2$ a pak zkuste také grafy funkcí $-x^2$; x^2+1 ; $(x+1)^2$; x^2+2x+2 ; x^2+3x+2; $|x^2+3x+2|$;

a navíc ještě do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí x, x^2, x^3, x^4;

c) $f(x)=\sqrt{x}$ a pak zkuste také grafy funkcí $\sqrt{-x}$; $\sqrt{|x|}$; $\sqrt{x^2}$; $\sqrt{x-1}$; $\sqrt{x}-1$;

a pak ještě do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí x^2 a $\sqrt{x}$; x^3 a $\sqrt[3]{x}$;

a také ještě do jednoho obrázku grafy funkcí x, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{x}$;

d) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ a pak zkuste také grafy funkcí $-\dfrac{1}{x}$; $\dfrac{1}{|x|}$; $\dfrac{1}{x+1}$; $\dfrac{1}{x}+1$; $\dfrac{x-2}{x+1}$;

e) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ a pak zkuste také grafy funkcí $\dfrac{1}{(x+1)^2}$; $\dfrac{1}{x^2}+1$; $\dfrac{1}{x^2+1}$; $\dfrac{1}{x^2-1}$;

f) $f(x)=e^x$ $(=\exp x)$ a pak zkuste také grafy funkcí $\exp(-x)$; $\exp(x-2)$; $\exp|x|$; $\exp(-|x|)$;

g) $f(x)=\ln x$ a pak zkuste také grafy funkcí $\ln(-x)$; $\ln|x|$; $|\ln x|$; $|\ln|x||$; $\ln(x+1)$;

($\ln x$ zde značí přirozený logaritmus čísla x)

h) $f(x)=\sin x$ a $f(x)=\cos x$ a zkuste také grafy funkcí $\sin(\frac{x}{2})$; $\cos(2x)$; $\cos(x+\pi)$; $|\sin x|$; $\sin|x|$; $\cos|x|$; $\sqrt{1-(\sin x)^2}$;

3. Vlastnosti funkce:

a) Zopakujte si definice pojmů: (i) funkce lichá, sudá, periodická;
(ii) funkce rostoucí, klesající, neklesající, nerostoucí na množině $M \subseteq R$;
(iii) funkce prostá na $M \subseteq R$;
(iv) funkce inverzní k funkci f na $M \subseteq R$.

b*) Ukažte (bez užití derivace), že funkce $f(x) = x^2$ je rostoucí na intervalu $[0,+\infty)$ a klesající na intervalu $(-\infty,0]$.

c) Najděte maximální intervaly, na kterých jsou ryze monotónní funkce:
$f(x) = x^2 + 2x + 2$; $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$; $h(x) = \exp(-x^2)$;
A pokuste se to i dokázat za předpokladu, že „víme“, že funkce e^x je rostoucí funkce v R.

4. Inverzní funkce:

a) Promyslete (a třeba se pokuste i dokázat):
Je-li funkce f rostoucí (resp. klesající) na intervalu (a,b), pak je funkce f na intervalu (a,b) prostá, a tedy existuje k funkci f na intervalu (a,b) funkce inverzní.

b) Najděte inverzní funkci k funkci
(i) $f(x) = x^2$ na intervalu $(-\infty,0]$;
(ii) $f(x) = x^2 + 2x + 2$ na maximálních možných intervalech;
(iii) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$ na maximálních možných intervalech;

IV. A něco z výrokového a množinového počtu:

1. Vysvětlete a pak negujte následující výroky:
a) $\forall x \in (a,b): \ |f(x)| \le 1$;
b) $\exists c > 0 \ \forall x \in (a,b): \ |f(x)| \le c$;
c) $\forall c > 0 \ \forall x \in (a,b): \ |f(x)| \le c$

2. Rozhodněte o pravdivosti výroku:
a) $\forall x \in R: \ \cos x = \sqrt{1-(\sin x)^2}$

3. Buď $A, B \subseteq R$, kde $A = \{a \in R; |a-1| < 2\}$ a $B = \{b \in R; |b+2| \ge 2\}$. Najděte množiny $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; $A \times B$.